

文章编号: 1000-7598 (2011) 12-3805-08

基于互补理论的扩展有限元接触问题实现

石 露¹, 李小春¹, 王 伟², 白 冰¹

(1.中国科学院武汉岩土力学研究所 岩土力学与工程国家重点实验室, 武汉 430071; 2.石家庄铁道大学 土木工程学院, 石家庄 050043)

摘 要: 在处理含有裂隙这类不连续问题时, 常规有限元方法需要对裂隙尖端部位进行局部网格加密, 当裂隙扩展时还需要进行网络重构。基于单位分解思想的扩展有限元成功解决了常规有限元难以处理的裂隙类不连续问题。在研究复合裂隙时, 通常需要考虑裂隙的接触问题。基于互补理论, 建立了裂隙面上相对位移和接触力的互补方程, 并采用牛顿法求解, 无需开闭迭代, 且能够快速收敛。最后, 对含裂隙平板进行受压数值试验, 计算结果表明, 基于互补理论的扩展有限元接触算法能够有效地阻止裂隙两端网格的相互嵌入, 且获得裂隙面上的应力分布与实际一致。

关 键 词: 扩展有限元; 互补理论; 接触问题

中图分类号: O 242.21

文献标识码: A

Implementation of XFEM's contact problem based on complementary law

SHI Lu¹, LI Xiao-chun¹, WANG Wei², BAI Bing¹

(1. State Key Laboratory of Geomechanics and Geotechnical Engineering, Institute of Rock and Soil Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Wuhan 430071, China; 2. School of Civil Engineering, Shijiazhuang Tiedao University, Shijiazhuang 050043, China)

Abstract: When dealing with discontinuous issues such as fracture and crack in geo-engineering, conventional finite element method (CFEM) need to refine mesh in the local zone including crack tip; furthermore, the mesh must be reconfigured and re-partitioned once the crack propagation happened. The extended finite element method (XFEM), based on the idea of partition of unit method, can successfully solve these problems easily, which may hardly be deposed by CFEM. Usually, contact problem of crack surface must be considered when studying some compound fracture. Based on the complementary theory, the complementary equation between relative displacement and contact force of the crack surface can be established, and solved by Newton's method without considering opening and closing iteration. Finally, as a numerical example, a plate with crack is compressed to indicate the effectiveness of this method. The results indicate that the method can prevent mesh penetration from one side of the crack into the other side effectively; and also obtain the stress distribution that is consistent with the actual on the crack surfaces.

Key words: extended finite element method (XFEM); complementary theory; contact problem

1 引 言

工程岩体的破坏往往是节理裂隙的扩展和贯通。目前, 有限元已是岩土工程和结构工程中广为应用的有力分析工具^[1], 但有限元在处理裂隙的扩展问题上存在许多困难, 如裂隙尖端部位的应力集中问题, 常规有限元的处理是在尖端处加密网格, 此外, 一旦裂隙扩展即裂隙的形状发生改变, 有限元网格则必须重构^[2-4], 这就极大地增加了计算量, 给常规有限元处理裂隙以及其扩展问题造成了瓶颈。

为了弥补常规有限元处理裂隙问题的不足,

Belytschko^[2]于 1999 年提出了一种在常规有限元框架内求解不连续问题的扩展有限元方法 (extended finite element method, 简称 XFEM)。在短短的十年间已经获得广泛的应用。XFEM 是基于单位分解思想^[3, 5], 在常规有限元单元的位移模式中引入跳跃函数和裂隙尖端位移场函数来反映裂隙的存在, 使得裂隙独立于有限元网格, 从而克服了常规有限元在裂隙尖端处的高密度网格划分和裂隙扩展以后网格需要重新划分的不足。扩展有限元建立在有限元框架下, 仍然保留着有限元的各种优点。文献[2-3]和[1, 6]分别对有限元中的单元积分方案、应力强度因子求解进行研究改进, 使扩展有限元方法愈来

收稿日期: 2010-05-28

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (No. 11102220, 51004073); 河北省自然科学基金项目 (No. E2010001062)。

第一作者简介: 石露, 男, 1984 年生, 助理研究员, 主要从事边坡工程稳定性及硬岩真三轴试验方面的研究。E-mail: 3660899@163.com

愈趋于成熟。文献[7]采用通用有限元程序 ABAQUS 提供的用户自定义单元 (UEL) 接口成功将扩展有限元嵌入到 ABAQUS 中, 取得了很好的效果。此后, 新版本的 ABAQUS (6.9.1 版) 已经支持了扩展有限元, 使扩展有限元的应用得到了进一步普及。

工程岩体中的裂隙与断层绝大多数处于压剪应力环境中, 因此, 在利用扩展有限元处理裂隙扩展问题时必须考虑裂隙接触。文献[8]将裂隙分解成多个线段, 取每个线段的二阶高斯点, 通过计算高斯点的相对位移, 并采用大时间增量法 Latin 求解接触问题。文献[7]利用叠加单元法求解扩展有限元接触问题。然而, 上述方法往往需要引用一些人工参数, 如法向刚度等, 使得结果只能近似满足^[9], 且需要开闭迭代。

本文基于互补理论, 构建裂隙面上位移与接触力的互补方程, 采用牛顿法求解方程, 编制了相应的计算机程序, 并利用 3 个数值算例验证本方法的有效性。

2 扩展有限元方法

2.1 扩展有限元基本原理

根据单元分解思想, 任意函数向量 $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ 如位移都可以用域内一组局部函数表示为

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_I \{N_I(\mathbf{x})\mathbf{u}_I\} \quad (1)$$

式中: $\mathbf{x}$ 为空间点坐标; $N_I(\mathbf{x})$ 为有限元节点形函数; $\mathbf{u}_I$ 为 I 节点的自由度。

正是由于此, 可以对有限元形函数根据需要进行改进, 即

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_I \{N_I(\mathbf{x})\left(\sum_l \psi_l(\mathbf{x})\mathbf{u}_l'\right)\} \quad (2)$$

式中: $\psi_l(\mathbf{x})$ 为改进函数; $\mathbf{u}_l'$ 则为相的改进自由度。如果 $\psi_1(\mathbf{x}) = 1$, 且 $\psi_{l \neq 1}(\mathbf{x}) = 0$, 那么, 式 (1) 和式 (2) 等效, 说明常规有限元空间是改进空间的子空间。

如上所述, 扩展有限元的关键是在常规有限元的位移模式中引用了特殊函数, 该特殊函数即是:

(1) 用于裂隙贯穿单元的跳跃 (Heaviside) 函数为

$$H(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \cdot \mathbf{n} > 0 \\ -1, & (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \cdot \mathbf{n} < 0 \end{cases} \quad (3)$$

式中: $\mathbf{x}^*$ 为裂隙上距离 $\mathbf{x}$ 点最近的点; $\mathbf{n}$ 为规定的裂隙单位正法向量。

(2) 用于裂隙尖端单元的尖端位移场函数向

量。由于裂隙未贯穿尖端单元, 跳跃函数不能反映裂隙尖端单元的变形特性, 因此, 引入裂隙尖端函数向量为

$$\mathbf{F}(r, \theta) = \begin{Bmatrix} \sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & \sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin(\theta) & \sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin(\theta) \end{Bmatrix} \quad (4)$$

式中: (r, θ) 为裂隙尖端局部极坐标。

引入上述两个特殊函数后, 扩展有限元的位移模式可写为

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{I \in K} N_I(\mathbf{x}) \left\{ \mathbf{u}_I + \underbrace{H(\mathbf{x})\mathbf{b}_I}_{I \in K_T} + \underbrace{\mathbf{c}_I \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x})}_{I \in K_A} \right\} \quad (5)$$

式中: $\mathbf{u}_I$ 对应节点连续位移部分; $\mathbf{b}_I$ 与 $\mathbf{c}_I$ 分别为分割单元和尖端单元节点的增加自由度, 对于分割单元节点每个方向增加 1 个自由度, 而对于裂尖单元每个方向则增加 4 个自由度, 因此 $\mathbf{c}_I$ 为一 $d \times 4$ 矩阵, d 为问题的维数; K_T 为裂隙切割单元的节点, 如图 1 中方形节点, 其中 1 单元即为裂隙切割单元; K_A 为裂隙尖端所在单元的节点, 如图 1 中圆形节点, 其中 3 单元即为裂隙尖端单元; 对于部分节点既是常规单元节点也是加强单元的强点, 应按照 K_A 、 K_T 和常规节点的顺序优先归类, 如图 1 所示的 2、4、5 和 6 单元的部分节点。

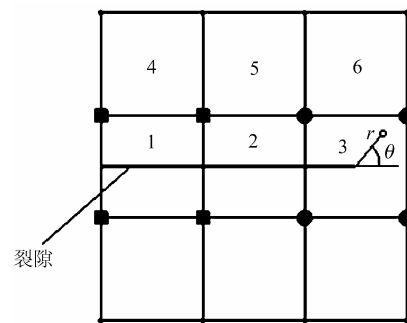


图 1 裂隙经过单元的改进

Fig.1 The improvement of the elements traversed by crack

式 (5) 得到的 $\mathbf{u}_I$ 并非节点的真实位移, 因此, 按照文献[7]采用的转基法对式 (5) 所示的扩展有限元位移模式进行改进, 即

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{I \in K} N_I(\mathbf{x}) \times \left\{ \mathbf{u}_I + \underbrace{[H(\mathbf{x}) - H_I]\mathbf{b}_I}_{I \in K_T} + \underbrace{\mathbf{c}_I \cdot [\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}_I]}_{I \in K_A} \right\} \quad (6)$$

式中: H_I 和 F_I 分别为节点 I 的跳跃函数与尖端函数自由度值。

2.2 扩展有限元实现的其他问题

2.2.1 水平集法

水平集法 (level set method) 是跟踪界面移动的数值技术, 其具体表达可参考文献[4]。由于裂隙不像多相不混溶流体界面需要移动, 裂隙是固定的, 即使裂隙发生扩展, 其在当前状态下仍是固定的, 与时间无关。

对于用于数值计算的裂隙, 无论是什么形状, 都用线段或者多线段表示, 在数据上按多线段端点的顺序进行存储, 规定裂隙的某段正方向为该线段前进方向逆时针旋转 $0^\circ \sim 180^\circ$, 如果考察点在其距离最近的裂隙段的正方向, 那么该点即在线段的正方向, 即如图 2 所示的 a 点, 反之, 即 b 点所示。

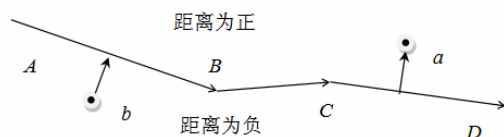


图 2 考察点的水平集函数

Fig.2 The level set function of the inspection points

以图 2 所示的裂隙 $ABCD$ 为例, 求 a 点的 Heaviside 函数值:

(1) 求出点 a 到裂隙 A 、 B 、 C 和 D 4 个端点的距离, 得出距离最小的为 C 点, 那么距离 a 点最近的裂隙段则可能是含有端点 C 的两个线段 BC 和 CD 。

(2) 计算向量 $\overrightarrow{CD}$ 的方向角 $\theta_1 \in [-\pi, \pi]$, 这一功能可通过 FDLIBM 库中的 atan2 函数实现。而后, 求出向量 $\overrightarrow{CB}$ 的方向角 $\theta_2 \in [-\pi, \pi]$, 形成闭区间 $\Theta[\theta_1, \theta_2]$, 如果 $\theta_2 < \theta_1$, 则闭区间为 $[\theta_1, \theta_2 + 2\pi]$ 。

(3) 最后求向量 $\overrightarrow{Ca}$ 的方向 $\theta \in [-\pi, \pi]$, 如果 θ 或 $\theta + 2\pi$ 在 Θ 区间内, 则该点的 Heaviside 函数值为 1, 否则为 -1。

2.2.2 单元积分

对于和裂隙相关的单元, 其单元内的应力-应变梯度较大, 若采用原始的积分方案显然不能满足精度要求。为了保证积分的精度, 将采用如下的积分方案^[10]:

(1) 对于不含加强节点的单元和含有 Heaviside 函数加强点但没被裂隙穿过的单元仍然维持原有的积分方案。

(2) 对于含有尖端函数加强节点, 且没有裂隙经过的单元采用 3×3 的高斯积分点进行积分。

(3) 对于裂隙加强单元, 根据裂隙与单元交点、裂隙端点和单元节点约束裂隙生成 Delaunay 三角形。对于裂隙分割单元, 每个三角形采用 3 个高斯积分点, 而尖端单元每个三角形则采用 7 个高斯积分点。

3 基于互补理论的接触问题实现

3.1 扩展有限元的接触问题

通常有限元中处理接触问题采用约束变分原理, 即拉格朗日乘子法或罚函数法, 并进行开闭迭代^[9-11]。常规有限元中的接触问题, 主从面上都会有节点存在, 而扩展有限元的裂隙面上并无节点, 文献[8]提出的大时间增量法求解扩展有限元接触问题, 依据裂隙段上的高斯点的力与位移关系进行迭代。本文根据文献[8], 仍用裂隙段上高斯点力与位移的关系来反映裂隙表面的接触关系。

如图 3 所示的裂隙 Γ , 将空间分成正 (Γ^+) 负 (Γ^-) 两部分, 其端点加上与单元交点将裂隙 Γ 分成多段。在每一段上取其二阶高斯积分点, 无论是用于分割单元的 Heaviside 跳跃函数抑或是尖端函数, 在裂隙面均是不连续。在裂隙段的高斯点上, 对于跳跃函数 $H=1$ 也可可是 $H=-1$, 而尖端局部坐标系上 $\theta=\pi$ 也可可是 $\theta=-\pi$, 因此, 裂隙上的高斯点反映裂隙正负面两点的特征。

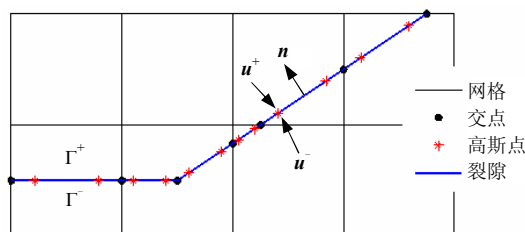


图 3 用于接触问题的裂隙段上高斯点

Fig.3 The Gauss points on crack segments for crack surface contact problem

规定高斯点所在的正单位法向为 n 。对于跳跃自由度, 当 $H=1$ 高斯点位移为 u^+ , 而当 $H=-1$ 该高斯点位移为 u^- ; 对高尖端自由度, 若该点位置在裂隙起点附近, 那么, u^+ 和 u^- 分别对应的 θ 为 $-\pi$ 和 π , 而该点所在裂隙终点位置时, 则相反。当

$$(u^+ - u^-) \cdot n > 0 \quad (7)$$

则可认为裂隙在该点处是张开的。若

$$(u^+ - u^-) \cdot n \leq 0 \quad (8)$$

则裂隙为闭合的, 那么, 高斯点相对法向位移 u_n 和切向位移向量 u_s 为

$$u_n = (u^+ - u^-) \cdot n \quad (9)$$

$$u_s = (u^+ - u^-) - u_n n \quad (10)$$

3.2 扩展有限元的接触问题互补方程的建立

3.2.1 法向接触

从物理角度来讲, 裂隙的上下部分不能相互嵌入, 因此有

$$u_n \geq 0 \quad (11)$$

同时, 裂隙面上的法向接触力 p_n 也不可能是拉力, 所以

$$p_n \geq 0 \quad (12)$$

此外, 若裂隙发生接触, 那么 $u_n = 0$, 而裂隙张开, 则 $p_n = 0$, 因此

$$p_n u_n = 0 \quad (13)$$

由此, 扩展有限元的法向接触问题转化为由式 (11) ~ (13) 表达的 2 个不等式和 1 个等式, 可用函数表达为

$$\psi_n(p_n, Eu_n) = 0 \quad (14)$$

式中: E 是为了使 p_n 和 Eu_n 有相同的量级而引入的一个具有弹性模量量纲的常数^[11]。

3.2.2 切向接触

裂隙切向方程以裂隙上正高斯点为研究对象。

裂隙的剪切强度符合 Mohr-Coulomb 强度准则, 最大切向应力为

$$|p_s|_{\max} = p_n \tan \varphi + c \quad (15)$$

式中: φ 和 c 分别为裂隙的内摩擦角和黏聚力。

于是, 裂隙上的切向应力 p_s 满足

$$|p_s| \leq p_n \tan \varphi + c \quad (16)$$

即

$$p_n \tan \varphi + c - |p_s| \geq 0 \quad (17)$$

为了反映当裂隙张开时裂隙的切向应力为 0, 引入一个小的数 ε , 将式 (17) 改为

$$p_n \tan \varphi + c \frac{p_n}{p_n + \varepsilon} - |p_s| \geq 0 \quad (18)$$

此外, 切向应力 p_s 和切向位移 u_s 方向相反, 并引入一个同法向接触中 E 相类似的 G , 有

$$-Gu_s \cdot p_s \geq 0 \quad (19)$$

无论是裂隙张开抑或是闭合, 切向为静摩擦或是滑动摩擦, 都会有

$$|u_s| \left(p_n \tan \varphi + c \frac{p_n}{p_n + \varepsilon} - |p_s| \right) = 0 \quad (20)$$

那么, 与法向接触相类似, 切向接触也可以通过式 (18) ~ (20) 的 2 个不等式和 1 个等式表示, 可用函数表达为

$$\psi_s \left(-Gu_s p_s, p_n \tan \varphi + c \frac{p_n}{p_n + \varepsilon} - |p_s| \right) = 0 \quad (21)$$

3.2.3 接触互补问题的求解

互补问题的求解有转轴类算法、内点法、方程组法以及投影类算法。其中, 方程组法是互补问题算法的一个热点, 步骤简单, 计算量小。文献[11]采用方程法求解了非连续变形分析 (DDA) 接触问题, 并验证了方程组法中的 Fisher-Burmeister (FB) 函数^[12]具有很好的鲁棒性。文献[13]亦采用该函数求解无压渗透的互补问题。基于此, 本文采用 FB 函数求解扩展有限元的接触互补问题, 该函数为

$$\psi_{FB}(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} - x - y \quad (22)$$

可见 FB 函数能够将法向和切向接触的 2 个不等式和 1 个等式方程表示为只含 1 个等式问题。

对于扩展有限元, 最终离散建的方程组为

$$KU - Q = 0 \quad (23)$$

式中: K 为总体刚度矩阵; U 为求解的位移自由度向量, 包括加强自由度; Q 为等效节点力向量。

由于裂隙上高斯点的力表现为作用力与反作用力, 因此, 该力对于常规自由度的等效节点力并无贡献, 而只对加强自由度中不连续的部分有贡献, 该自由度为分割单元的加强自由度 b 和尖端单元的第一加强自由度 c^1 , 因此, 只需要计算这两类的自由度的等效节点力即可。

设裂隙高斯点上的接触力向量为 P , 转换矩阵为 C , 那么由接触力提供的等效节点力向量可写为

$$Q_c = CP \quad (24)$$

裂隙上高斯点的相对位移为

$$U_c = DU \quad (25)$$

式中: D 为位移求解矩阵, 该矩阵中已经考虑了向量的旋转。

于是, 扩展有限元的接触问题即转换成非线性方程组的求解, 即

$$H(U, P) = \begin{pmatrix} KU - CP - Q \\ \psi_{FB}(U, P) \end{pmatrix} = 0 \quad (26)$$

根据文献[14], 采用牛顿法求式 (26), 具体步骤为:

(1) 选定初值 $(U^0, P^0) = (K \backslash Q, 0)$, 给定精度水平 ξ 和最大迭代步 M ;

(2) 对于 $k = 0, 1, \dots, M$ 执行迭代;

(3) 令

$$\Delta(U^k, P^k) = -\frac{H(U^k, P^k)}{H'(U^k, P^k)} \quad (27)$$

式中: $H'(U^k, P^k)$ 即为 Jacobian 矩阵, 等于

$$H'(U^k, P^k) = \begin{bmatrix} K & C \\ A & B \end{bmatrix} \quad (28)$$

该 Jacobian 矩阵中, 对应 U 的部分无需改变, 而 A 和 B 所对应的未知数 P 在每一步根据式(22)求解;

(4) 若 $\|\Delta(U^k, P^k)\| / \|(U^k, P^k)\| < \xi$, 则停止迭代; 否则转至第(5)步;

(5) 计算 $(U^{k+1}, P^{k+1}) = (U^k, P^k) + \Delta(U^k, P^k)$;

(6) 若 $k < M$, 继续迭代; 否则, 输出迭代不成功信息, 停止计算。

4 程序实现及算例分析

4.1 程序实现

为了详细说明采用互补理论实现扩展有限元的接触问题, 本文采用 Matlab 编程实现上述算法。具体的程序实现流程如图 4 所示, 该程序的特点是突出接触问题的求解, 没有考虑裂隙的扩展问题。

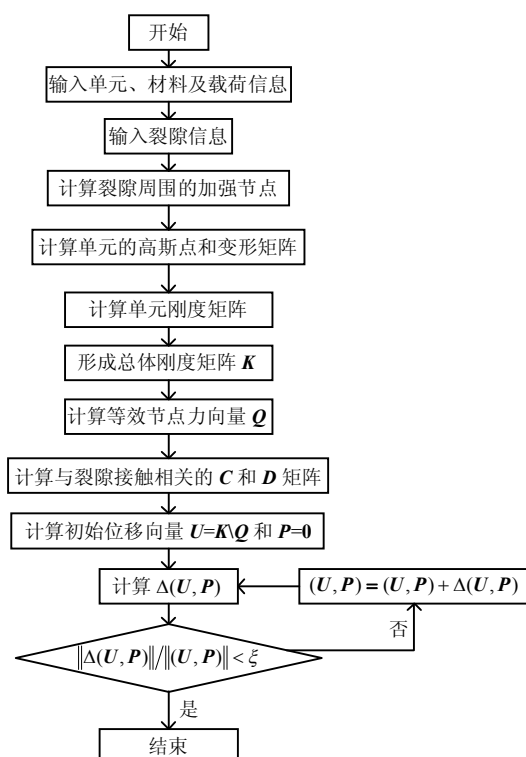


图 4 程序流程图

Fig.4 Program flowchart

4.2 算例 1

如图 5 所示的一平板, 其下端固定, 上段受到 $\sigma = 1$ MPa 的压力, 左边一边缘裂隙长为 $a = 3.5$ m, 平板长 $L = 16$ m, 宽 $W = 7$ m。平板的弹性模量为 10 GPa, 泊松比为 0.3。该算例不考虑摩擦力。

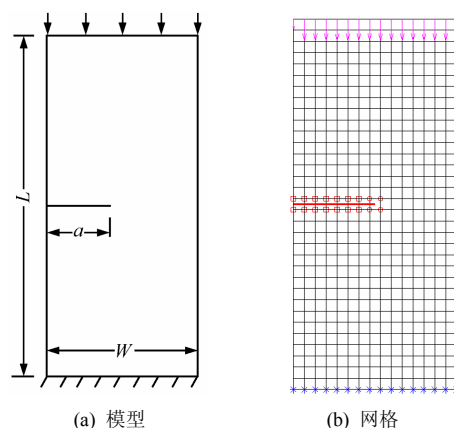


图 5 算例 1 的模型与网格

Fig.5 Model and mesh grid of the example 1

图 6(a)、6(b)分别为有接触与无接触下该模型的垂直位移变形网格云图, 通过对比可以看出, 当无接触时网格发生相互嵌入, 垂直位移在裂隙的上下表面发生突变, 而考虑接触以后, 并未发生相互嵌入, 说明本文的接触模型是有效的。本算例采用的牛顿法经过 6 次迭代, 容差为 1.865×10^{-12} , 说明牛顿法解决扩展有限元的接触互补问题收敛速度快。图 7 为裂隙上的正压力分布, 该曲线已经根据裂隙段的高斯点位置进行了 3 次埃尔米特插值, 可以看出, 裂隙上法向应力均近似为 1 MPa, 与实际相符合。

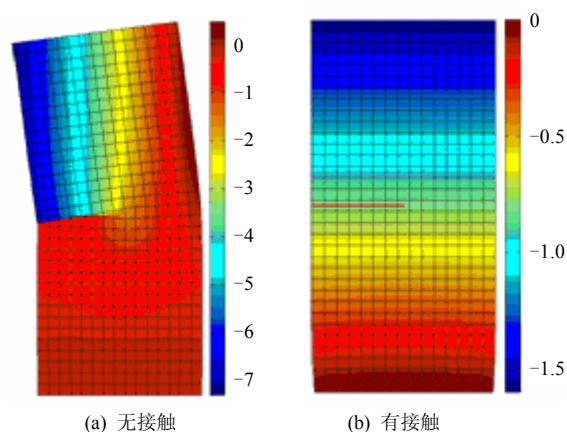


图 6 算例 1 的垂直位移云图(单位: mm)

Fig.6 Vertical displacement nephogram of the example 1 (unit: mm)

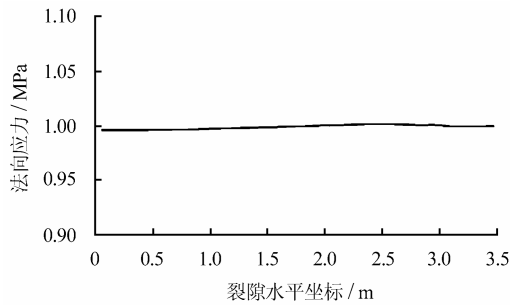


图 7 算例 1 裂隙上的正压力分布

Fig.7 Distribution of normal stress on crack surface of the example 1

4.3 算例 2

为了验证裂隙面上压力为非均匀的情况, 本算例考察平板上含有圆孔, 如图 8(a)所示, 平板的下端固定, 上端受到 $\sigma = 1 \text{ MPa}$ 的压力, 中间有一圆孔, 其半径 $R = 0.2 \text{ m}$, 平板长 $L = 3.4 \text{ m}$, 宽 $W = 2 \text{ m}$, 圆孔的两侧有一对称的裂隙长为 $a = 0.5 \text{ m}$. 平板的材料参数与算例 1 相同, 计算采用图 8(b)所示的对称模型。

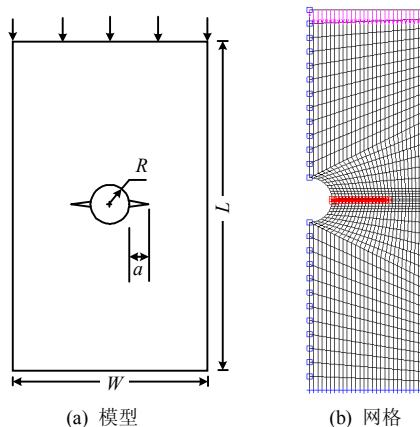


图 8 算例 2 模型与网格

Fig.8 Model and mesh grid of the example 2

图 9(a)、9(b)分别为有接触与无接触下该模型的垂直位移变形网格云图, 本文的接触模型同样能有效阻止网格嵌入。该算例采用的牛顿法经过 6 次迭代即收敛, 容差为 2.298×10^{-12} 。图 10 为裂隙上的正压力分布, 同时对比了法向刚度 (对应着罚函数法的罚参数) 分别为 $1e^{11}$ 、 $5e^{11}$ 、 $1e^{12}$ 和 $1e^{14}$ 的常规有限元 (CFEM) 求解, 可以看出, 常规有限元求解时其法向刚度越大, 裂隙面上的压应力分布则越与本文算法得出的结果相近, 再次说明本文算法的有效性, 也说明了法向刚度对常规有限元求解接触问题有着较大影响。

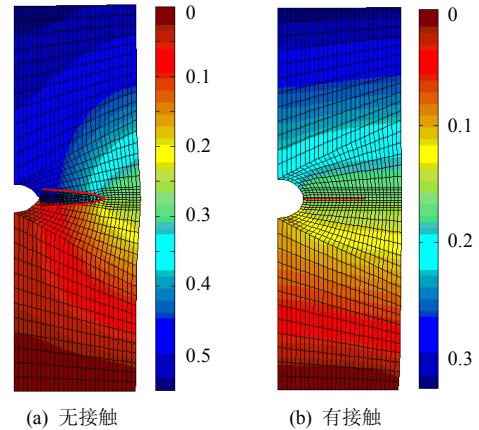


图 9 算例 2 的垂直位移云图(单位: mm)

Fig.9 Vertical displacement cloud map of the example 2 (unit: mm)

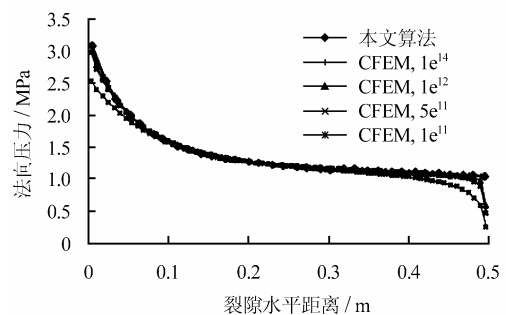


图 10 算例 2 裂隙上的正压力分布

Fig.10 Distribution of normal stress on crack surface of the example 2

4.4 算例 3

本例裂隙考虑摩擦作用。采用贯通裂隙, 即无尖端加强单元。采用算例 1 中的平板模型, 裂隙与水平方向夹角 $\beta = 45^\circ$, 如图 11 所示, 其余尺寸均见算例 1。该裂隙的内摩擦角和黏聚力分别为 43° 和 50 kPa 。

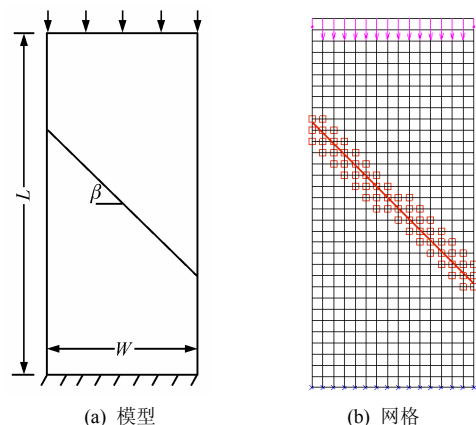


图 11 算例 3 模型与网格

Fig.11 Model and mesh grid of the example 3

图 12(a)、12(b)分别为有接触与无接触下该模型的垂直位移变形网格云图,图 12(a)中由于无接触计算的位移已经超过 10 个量级了,所以图中没给出图例;采用接触模型以后,可见垂直位移具有连续性。本算例采用的牛顿法经过 7 次迭代,容差为 1.886×10^{-7} 。图 13 为裂隙上的剪应力分布,该曲线已经根据裂隙段的高斯点位置进行了 3 次埃尔米特插值,其计算的剪应力与 45° 倾角的剪应力值几乎相等,亦说明本文的接触摩擦模型也是有效的。

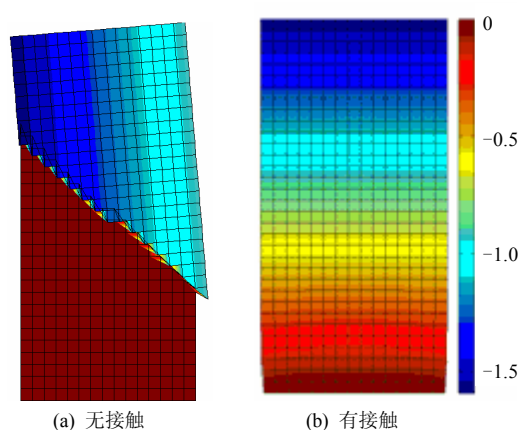


图 12 算例 3 的垂直位移云图(单位: mm)

Fig.12 Vertical displacement cloud map of the example 3 (unit: mm)

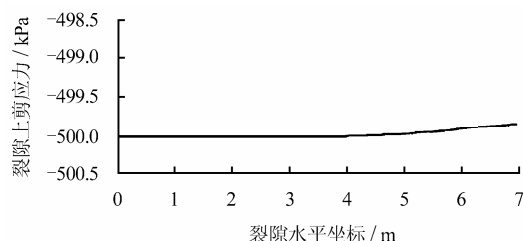


图 13 算例 3 裂隙上的剪应力分布

Fig.13 Distribution of shear stress on crack surface of the example 3

5 结 论

本文基于互补理论,根据扩展有限元的接触特征,构建了裂隙面上的位移与接触力的互补方程,并采用牛顿法求解方程。形成如下结论:

(1) 扩展有限元在常规有限元的基础上引入加强自由度,能够高效地解决裂隙等不连续问题。

(2) 裂隙面上的法向应力与法向位移、剪切应力与剪切位移这两对关系均可由 2 个不等式和 1 个等式表达。根据互补理论则可将该关系转成 1 个互补方程。该互补方程能够将接触问题转化成函数求解,抛开了人工参量引入以及开闭迭代。

(3) 含裂隙平板的 3 个数值试验表明,采用牛顿法求解互补问题,只需 6~7 步迭代即可使容差达到非常小的水平,收敛速度非常快。同时求解精度也很高。

(4) 对比引入法向刚度的罚函数法,法向刚度值越大,其结果越与本文的求解相接近。这一方面说明本文方法的有效性,同时也说明罚数的取值对结果有着较大的影响。

参 考 文 献

- [1] 蔡美峰,何满潮,刘东燕. 岩石力学与工程[M]. 北京: 科学出版社, 2002.
- [2] BELYTSCHKO T, BLACK T. Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1999, 45(5): 601—620.
- [3] MOES N, DOLBOW J, BELYTSCHKO T. A finite element method for crack growth without remeshing[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1999, 46(1): 131—150.
- [4] 李录贤,王铁军. 扩展有限元法(XFEM)及其应用[J]. 力学进展, 2005, 35(1): 5—20.
LI Lu-xian, WANG Tie-jun. The extended finite element method and its application—A review[J]. *Advances in Mechanics*, 2005, 35(1): 5—20.
- [5] 彭自强,王水林,葛修润. 单位分解法、无网格法、数值流形方法之形函数的内在联系[J]. 岩石力学与工程学报, 2002, 21(增刊 2): 2429—2431.
PENG Zi-qiang, WANG Shui-lin, GE Xiu-run. Relation between shape functions of the partition of unity method, meshless method and numerical manifold method[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2002, 21(Supp. 2): 2429—2431.
- [6] LIU X Y, XIAO Q Z, KARIHALOO B L. XFEM for direct evaluation of mixed mode SIFS in homogeneous and bi-material[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2004, 59(8): 1103—1118.
- [7] GINER E, SUKUMAR N, TARANCON J E, et al. An ABAQUS implementation of the extended finite element method[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2009, 76: 347—368.

- [8] DOLBOW J, MOES N, BELYTSCHKO T. An extended finite element method for modeling crack growth with frictional contact[J]. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 2001, 190(51—52): 6825—6846.
- [9] 郑宏, 江巍. 基于互补理论的非连续变形分析方法[J]. 中国科学 E 辑: 科学技术, 2009, 39(10): 1702—1708.
ZHENG Hong, JIANG Wei. Discontinuous deformation analysis based on complementary theory[J]. **Science in China Series E: Technological Sciences**, 2009, 39(10): 1702—1708.
- [10] 丁晶. 扩展有限元在断裂力学中的应用[D]. 南京: 河海大学, 2007.
- [11] 江巍. 基于互补理论的非连续变形分析方法[D]. 武汉: 中国科学院武汉岩土力学研究所, 2009.
- [12] FISCHER A. A special Newton-type optimization method[J]. **Optimization**, 1992, 24(3—4): 268—284.
- [13] ZHENG H, LIU D F, LEE C F, et al. A new formulation of Signorini's type for seepage problems with free surfaces[J]. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 2005, 64(1): 1—16.
- [14] 颜庆津. 数值分析[M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 2006.